Ganar perdiendo: la paradoja de Parrondo y sus aplicaciones, por Juan M. R. Parrondo

por Anxo Sánchez el 29/12/2014

En un comentario a un post reciente de Antonio sobre si la ciencia es un lujo prescindible, un comentarista de nombre "peter" introdujo un off-topic *pidiéndonos que habláramos de la paradoja de Parrondo, y le prometí que hablaría con el propio Parrondo (véase también aquí) y le pediría que nos hiciera un post. Muy amablemente, accedió y hoy tenemos el lujo de contar con una explicación de este interesante y sorprendente fenómeno de la mano de su propio descubridor. Con él les dejo, dándole las gracias por el post y seguro de que lo disfrutarán.*

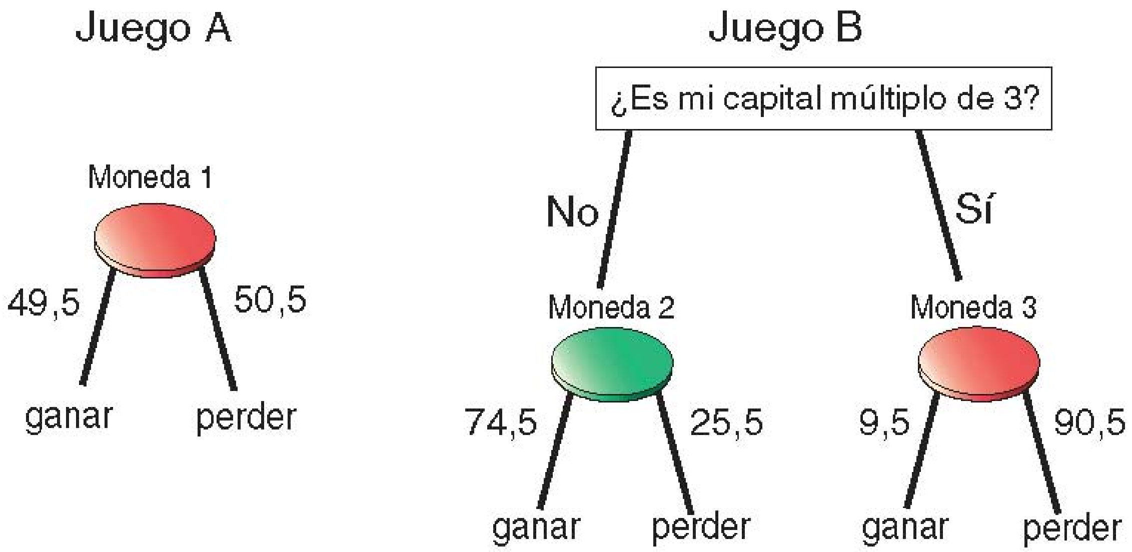
Hace ya la friolera de 15 años apareció en Nature un breve artículo titulado "Losing strategies can win by Parrondo's paradox", de los investigadores australianos Derek Abbott y Gregory P. Harmer, y su correspondiente reseña "Good news for losers" de Philip Ball. El artículo hablaba de una paradoja de la teoría de la probabilidad que se puede formular de manera muy sencilla: dos juegos de azar perdedores dan lugar, cuando se alternan, a un juego ganador.

Uno de los juegos en cuestión es algo peculiar, está específicamente diseñado para producir este efecto y no se encuentra en ningún casino o lotería. A pesar de ello la paradoja tuvo una repercusión considerable en medios de comunicación. Todo el mundo puede entenderla, es a primera vista sorprendente y transmite un "mensaje" optimista (aunque la paradoja se puede invertir de forma trivial de modo que dos juegos ganadores den lugar a uno perdedor) que da mucho juego a la hora de titular artículos de divulgación: *Losing to win*, *Qui perd gagne*, *Lady luck: treat her bad and still be glad*,…

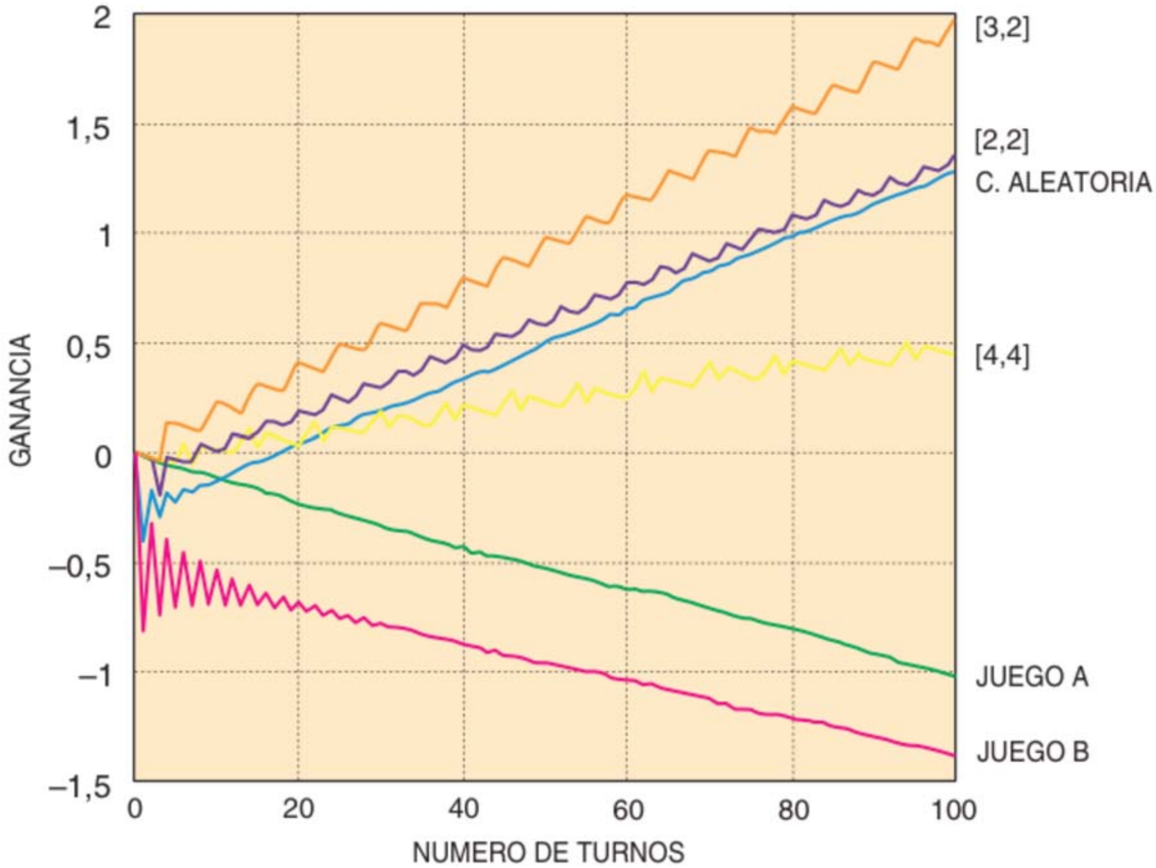
En el mundo académico la paradoja ha atraído el interés de investigadores de distintos campos, sobre todo de matemáticas, biología, ecología y economía; y aparece ya en alguna enciclopedia de matemáticas y en libros de texto de probabilidad.

Pero vayamos al asunto. En este post voy a explicar brevemente la paradoja original y a intentar dar una explicación intuitiva del fenómeno. Luego describiré algunas variantes y aplicaciones en especial en análisis financiero, que supongo que son las que más interesan a los lectores de NeG. Aunque adelanto que esas aplicaciones no son para tirar cohetes, precisamente.

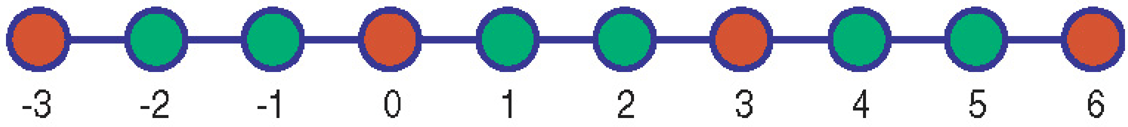
Los dos juegos de la paradoja original son juegos de azar en los que un jugador puede ganar o perder un euro con cierta probabilidad. En el primero de los juegos, llamémoslo A, el jugador gana un euro con probabilidad 49,5% y pierde con probabilidad 50,5%. Este juego, debido al pequeño sesgo que separa las probabilidades del 50%, es un juego perdedor. El jugador, en media, pierde de forma sistemática. En el juego B, las probabilidades dependen de lo que el jugador ha ganado hasta el momento (llamaremos a esa cantidad el *capital*). Si lo que lleva ganado es múltiplo de 3, entonces gana con probabilidad 9,5% y pierde con probabilidad 90,5%. Si el capital no es múltiplo de 3, la probabilidad de ganar es 74,5% y la de perder 25,5%. Como se ve, el juego B es en ocasiones bastante favorable, pero en otras (cuando el capital es múltiplo de 3) es muy desfavorable. Los números están escogidos para que, en media, el juego sea perdedor (aunque demostrarlo matemáticamente no es sencillo). En el siguiente esquema se resumen la reglas de los dos juegos:



En la figura se representan las probabilidades mediantes distintas monedas, una de ellas favorable (en verde) y las otras dos desfavorables (en rojo). Esta representación es conveniente para la discusión posterior. Como hemos dicho, en los dos juegos el jugador pierde, en media, de forma sistemática. Sin embargo, si se alternan siguiendo la secuencia AABBAABB… el jugador gana. Y no es ésta la única secuencia que produce ganancias. Jugando A tres turnos, seguidos de dos turnos de B, la ganancia es aún mayor. Incluso si en cada turno se elige al azar el juego A ó B (combinación aleatoria), también gana el jugador de forma sistemática. En la siguiente figura se puede ver la ganancia media de 5000 jugadores en función del número de turnos, jugando a A y B únicamente o a distintas secuencias (los números entre paréntesis [*a*,*b*] indican la secuencia utilizada: *a* turnos del juego A, seguidos de *b* turnos del juego B):



La ganancia media es pequeña, no llega a dos euros en 100 turnos, pero el efecto "paradójico" es perfectamente visible. ¿Cuál es el mecanismo que da lugar a este comportamiento? La clave está en lo que ocurre en el juego B cuando el capital es múltiplo de 3. En ese caso se juega una moneda muy desfavorable (la moneda 3 en la figura anterior), con una probabilidad de ganar inferior al 10%. Si representamos el capital del jugador mediante casillas en una línea:



las casillas múltiplo de 3 son muy difíciles de superar cuando jugamos a B. Lo que hace el juego A es ayudar a superar esas casillas difíciles. Este mecanismo es de hecho el que inspiró la paradoja original y era conocido en física como "efecto ratchet" (en inglés *ratchet* es una rueda dentada con dientes asimétricos y que puede girar sólo en una dirección. En relojes y otros dispositivos, las ratchets se utilizan, entre otras cosas, para *rectificar* un movimiento fluctuante u oscilatorio convirtiéndolo en movimiento en una dirección). Aquí pueden ver una simulación de este efecto (hace falta Java) en un modelo llamado motor browniano, muy utilizado para estudiar motores moleculares en células biológicas.

Entender este mecanismo nos permitió encontrar una variante del juego B en donde las probabilidades no dependen del capital sino de los dos últimos resultados. Esta variante ha sido utilizada por Spurgin y Tamarkin en un modelo muy simple de gestión de carteras. Raúl Toral, del IFISC, diseñó otra variante muy ingeniosa: simuló un grupo de jugadores y sustituyó el juego A por una redistribución del capital. El resultado es similar a la paradoja original. Sin redistribución todos los jugadores juegan B y, por tanto, pierden. Sin embargo, cuando se intercalan turnos de redistribución de capital, en el que unos jugadores dan un euro a otros (Toral exploró varios mecanismos de redistribución), entonces todos ellos ganan.

Ambos modelos pueden considerarse "de juguete", es decir, modelos que no tratan de ser realistas sino únicamente poner de manifiesto algún hecho básico. En mi opinión, es difícil que la paradoja, en una versión parecida a la original, se observe en un sistema real. Es necesario en primer lugar unas probabilidades de ganar y perder que dependan del capital o del historial de ganancias y pérdidas, algo que no ocurre en sistemas financieros o económicos. En segundo lugar, tiene que ser pertinente algún tipo de alternancia que el jugador no pueda controlar, o bien una situación en la que el jugador no conozca las probabilidades, puesto que, si las conociera, alternaría entre los juegos A y B de forma trivial, eligiendo A cuando el capital es múltiplo de 3.

En esta última observación se basaron Raghuram Iyengar y Rajeev Kohli, de la Universidad de Columbia, en su artículo Why Parrondo's Paradox is Irrelevant for Utility Theory, Stock Buying and the Emergence of Life. El artículo es algo pedestre y sus conclusiones aventuradas, pero nos fue útil para plantearnos un nuevo problema relacionado con los juegos: ¿qué ocurre si varios jugadores tienen que tomar una decisión colectiva y elegir si juegan A ó B? Aquéllos cuyo capital es múltiplo de 3 preferirán A y el resto querrán jugar a B. ¿Cómo pueden ponerse de acuerdo? Junto con Luis Dinis y otros colaboradores analizamos la eficacia de distintos mecanismos de toma de decisiones (democracia, optimización de ganancia en cada turno, oligarquías,…) con resultados interesantes como que la optimización a corto plazo puede dar lugar a pérdidas sistemáticas mientras que una elección aleatoria del juego da lugar a ganancias sistemáticas. Pueden consultarse los resultados en la tesis de Luis. De nuevo se trata de modelos de juguete que sólo tratan de llamar la atención sobre hechos básicos de sistemas aleatorios.

La paradoja transmite también un mensaje muy general: "la alternancia no es trivial". Aunque no es excesivamente novedoso, ha inspirado varios trabajos interesantes y ha aumentado el interés por la alternancia de dinámicas: dos dinámicas caóticas que dan lugar a una ordenada, patrones producidos por la alternancia de dinámicas, un modelo para la evolución de la población de un virus en el que éste prolifera si hay alternancia entre distintas condiciones (verano e invierno por ejemplo) que por sí solas serían letales,… En estos casos el origen del comportamiento paradójico es un cierto antagonismo entre el comportamiento estacionario y el transitorio en cada una de las dinámicas. Cuando éstas se alternan, el transitorio se estabiliza y observamos un comportamiento muy diferente del que produce cada dinámica por separado.

Este es un mecanismo que puede ser interesante en economía, donde me da la impresión de que en ocasiones se subestima la importancia de los comportamientos transitorios.

Una última aplicación en finanzas. En varios trabajos se ha relacionado la paradoja con un mecanismo conocido como *volatility pumping*, en el que la redistribución del capital en una cartera compuesta por activos que se deprecian puede conducir a ganancias sistemáticas. Aunque existe una cierta semejanza en su formulación, la matemática que subyace al volatility pumping es diferente de la de los juegos paradójicos. El volatility pumping se basa en una propiedad curiosa de los llamados procesos aleatorios multiplicativos: procesos en los que una variable, como el precio de una acción, se multiplica cada día por un factor aleatorio. En ciertos procesos multiplicativos el comportamiento medio y el típico son muy diferentes: la media puede crecer y, al mismo tiempo, las trayectorias típicas pueden ser decrecientes. Al redistribuir el capital entre los distintos activos, y bajo ciertas condiciones, lo que se consigue es favorecer el comportamiento medio frente al típico. Aquí pueden ver una exposición muy simple del fenómeno (artículo de pago).

Como habrán podido ver, las aplicaciones de la paradoja en economía y finanzas son algo limitadas. Como he mencionado antes, creo que es difícil encontrar aplicaciones de la paradoja en estos campos y más aún extraer conclusiones genéricas del tipo "alternar políticas económicas es positivo". Sin embargo, los juegos paradójicos revelan un comportamiento inesperado que sí debería tener presente la gente que trabaja con modelos estocásticos. Además de eso, creo que la paradoja, como ocurre con la mayoría de los fenómenos paradójicos o que desafían nuestra intuición, invita a la reflexión y a tomar ciertas precauciones a la hora de aplicar argumentos que a primera vista parecen incontestables.